

問題 3-1 ※問題の指示が「標準形に直して解け」なのでそれに従うこと

2. (1)

与式より $p = -2, q = 5$ とおける

$y = e^x z(x)$ とすると

$$z'' + (5 - \frac{4}{4})z = 0$$

$$z'' + 4z = 0$$

これは式(3.12)で $\lambda = \pm 2$ とおいたものになるので, 解は

$$z = a \sin 2x + b \cos 2x$$

よって $y = e^x (a \sin 2x + b \cos 2x)$

(2)

与式より $p = 4, q = -5$ とおける

$y = e^{-\frac{4}{2}x} z(x) = e^{-2x} z(x)$ とすると

$$z'' + (-5 - \frac{16}{4})z = 0$$

$$z'' - 9z = 0$$

これは式(3.14)で $\lambda = \pm 3$ とおいたものになるので, 解は

$$z = ae^{3x} + be^{-3x}$$

よって $y = e^{-2x} (ae^{3x} + be^{-3x}) = ae^x + be^{-5x}$

(3)

与式を変形すると $y'' - y' + \frac{5}{2}y = 0$ より $p = -1, q = \frac{5}{2}$ とおける

$y = e^{\frac{x}{2}} z(x)$ とすると

$$z'' + (\frac{5}{2} - \frac{1}{4})z = 0$$

$$z'' + \frac{9}{4}z = 0$$

これは式(3.12)で $\lambda = \pm \frac{3}{2}$ とおいたものになるので, 解は

$$z = a \sin \frac{3}{2}x + b \cos \frac{3}{2}x$$

よって $y = e^{\frac{x}{2}} (a \sin \frac{3}{2}x + b \cos \frac{3}{2}x)$

(4)

与式を変形すると $y'' + 3y' - 4y = 0$ より $p = 3, q = -4$ とおける.

$y = e^{-\frac{3}{2}x} z(x)$ とすると,

$$z'' + \left(-4 - \frac{9}{4}\right)z = 0$$

$$z'' - \frac{25}{4}z = 0$$

これは式(3.14)で $\lambda = \pm \frac{5}{2}$ とおいたものになるので, 解は

$$z = ae^{\frac{5}{2}x} + be^{-\frac{5}{2}x}$$

よって, $y = e^{-\frac{3}{2}x} \left(ae^{\frac{5}{2}x} + be^{-\frac{5}{2}x} \right) = ae^x + be^{-4x}$

(5)

与式を変形すると $y'' + 3y' + \frac{5}{2}y = 0$ より $p = 3, q = \frac{5}{2}$ とおける

$y = e^{-\frac{3}{2}x}z(x)$ とすると

$$z'' + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{4}\right)z = 0$$

$$z'' + \frac{1}{4}z = 0$$

これは式(3.12)で $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ とおいたものになるので, 解は

$$z = a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{よって } y = e^{-\frac{3}{2}x} \left(a \sin \frac{x}{2} + b \cos \frac{x}{2} \right)$$

問題 3・2

$$(1) \quad y'' - 8y' + 15y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ とおく}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda = 3, 5$$

$$y = ae^{3x} + be^{5x}$$

$$(2) \quad y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ とおく}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\lambda = 4 \text{ (重解)}$$

$$y = (a + bx)e^{4x}$$

$$(3) \quad y'' - 8y' - 32y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ とおく}$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 32 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 128}}{2}$$

$$= 4 \pm 4i$$

$$y = e^{4x}(a \sin 4x + b \cos 4x)$$

$$(4) \quad 2y'' - 5y' + 3y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ とおく}$$

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}$$

$$= \frac{3}{2}, 1$$

$$y = ae^{\frac{3}{2}x} + be^x$$

$$(5) \quad 2y'' - 5y' + 4y = 0$$

$$y = e^{\lambda x} \text{ とおく}$$

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{4}$$

$$= \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

$$y = e^{\frac{5}{4}x} \left(a \sin \frac{\sqrt{7}}{4}x + b \cos \frac{\sqrt{7}}{4}x \right)$$